Lösen von Exponentialgleichungen

Beispiele:

1. $2^x = 8 \quad \Rightarrow x = 3$ "Probieren"
2. $\left(\frac{3}{4}\right)^{2x} = \frac{27}{64} \quad \Rightarrow x = \frac{3}{2}$
3. $2^{3x-2} = 2^7$ "Exponentenvergleich"
   $\Rightarrow 3x - 2 = 7 \quad \Rightarrow x = 3$
4. $5^x = 30$
   Auflösen nach x liefert:
   $x = \log_5 30$ (Logarithmus von 30 zur Basis 5)

Besondere Logarithmen:

a) Zehnerlogarithmus (Basis 10)
$\log_{10} 3 = \lg 3 \approx 0{,}47712$

b) Natürlicher Logarithmus (Basis e)
$\log_e 3 = \ln 3 \approx 1{,}0986$

Berechnung von Logarithmen mit anderer Basis mit Hilfe von lg bzw. ln:

$$\log_c a = \frac{\lg a}{\lg c} = \frac{\ln a}{\ln c}$$

Beispiel: $\log_5 30 = \frac{\lg 30}{\lg 5} \approx 2{,}1133$

Aufgaben:

1 $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 0{,}2$

2 $2^{x-1} = 35$

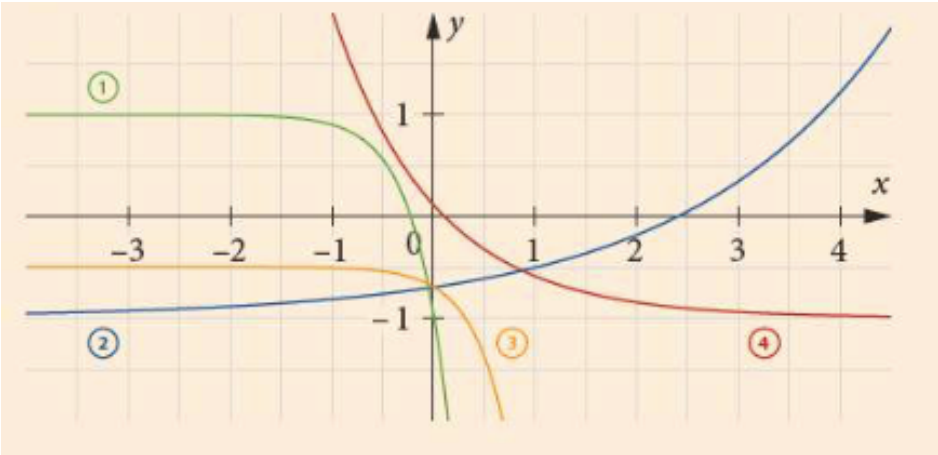
3 $\frac{1}{4} \cdot 5^{y+2} = 250$

4 $4^{3z-2} = 4^{z+1}$

5 $e^{5x} + 5 = 5e^{5x}$

6 Berechnen Sie Schnittpunkte der Funktionsgraphen mit den Koordinatenachsen.
Ordnen Sie mithilfe der Ergebnisse jeden Funktionsterm dem richtigen Graphen zu.

$f(x) = -2e^{3x} + 1 \quad g(x) = 0{,}3e^{0{,}5x} - 1 \quad h(x) = -0{,}2e^{x-1} - 0{,}5 \quad k(x) = 3e^{-x-1} - 1$



7.0 Gegeben sind die beiden Funktionen f und g mit $f(x) = 8e^{-x} - 3$ und $g(x) = 3 - e^x$.

7.1 Berechnen Sie die Schnittpunkte der beiden Graphen mit den Koordinatenachsen.

7.2 Zeichnen Sie die beiden Graphen für $-1 \le x \le 2$ in ein gemeinsames Koordinatensystem.

7.3 Ermitteln Sie rechnerisch die gemeinsamen Punkte beider Graphen.

8 Die Krebszellen einer Ratte in einem Versuchslabor vermehren sich gemäß der Funktion f mit $f(t) = 2e^{1{,}6094t}$, wobei $t \ge 0$ den Zeitpunkt in Tagen und f(t) den Bestand der Krebszellen zum Zeitpunkt t angibt. Sobald 8500 Krebszellen entstanden sind, soll der Ratte ein Zusatzmedikament injiziert werden.
Ermitteln Sie diesen Zeitpunkt.

9.0 Der Abbau eines Medikaments im Körper eines Menschen folgt der Funktion f mit $f(t) = 100e^{-0,125t}$ für $t \geq 0$ (t in Tagen nach Beginn der Einnahme und f(t) die Konzentration des Medikaments im Blut in mg).

9.1 Berechnen Sie, wie hoch die Konzentration des Medikaments im Körper nach 10 Tagen ist.

9.2 Berechnen Sie, nach wie vielen Tagen die Konzentration erstmals unter 10 mg gesunken ist.

10 Lösen Sie die folgende Gleichung über der Grundmenge der reellen Zahlen. (Abitur 2019 Teil 1)

$$e^{x^2} = e^{2x-1}.$$

11 Lösen Sie die folgende Gleichung über der Grundmenge der reellen Zahlen. (Abitur 2022 Teil 1)

$$\left(e^x - 2\right)^2 - 4 = 0$$

12 Lösen Sie die folgende Gleichung über der Grundmenge der reellen Zahlen.

$$\left(e^x\right)^2 - 25 = 0$$

Lösungen:

1. $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 0{,}2$

$x = \log_{0,5} 0{,}2 \approx 2{,}3219$

2. $2^{x-1} = 35$

$x - 1 = \log_2 35 \quad \Rightarrow x = \log_2 35 + 1 \approx 6{,}1293$

3. $\frac{1}{4} \cdot 5^{y+2} = 250$

$5^{y+2} = 1000 \quad \Rightarrow y + 2 = \log_5 1000 \quad \Rightarrow y = \log_5 1000 - 2 \approx 2{,}2920$

4. $4^{3z-2} = 4^{z+1}$

$3z - 2 = z + 1 \quad \Rightarrow 2z = 3 \quad \Rightarrow z = \frac{3}{2}$

5. $e^{5x} + 5 = 5e^{5x} \quad \Rightarrow 4e^{5x} = 5 \quad \Rightarrow e^{5x} = 1{,}25 \quad \Rightarrow x = \frac{\ln(1{,}25)}{5} \approx 0{,}045$

6

$f:(1) \quad f(0) = 1 \quad -2e^{3x} + 1 = 0 \quad \Rightarrow e^{3x} = 0{,}5 \quad \Rightarrow x = \frac{\ln(0{,}5)}{3} \approx -0{,}23$

$S_y(0|1) \quad N(-0{,}23|0)$

$g:(2) \quad g(0) = -0{,}7 \quad 0{,}3e^{0,5x} - 1 = 0 \quad \Rightarrow e^{0,5x} = \frac{10}{3} \quad \Rightarrow x = \frac{\ln\left(\frac{10}{3}\right)}{0{,}5} \approx 2{,}41$

$S_y(0|-0{,}7) \quad N(2{,}41|0)$

$h:(3) \quad h(0) = -0{,}57 \quad -0{,}2e^{x-1} - 0{,}5 = 0 \quad \Rightarrow e^{x-1} = -2{,}5 \quad \Rightarrow \text{keine Nullstellen}$

$S_y(0|-0{,}57)$

$k:(4) \quad k(0) = 0{,}10 \quad 3e^{-x-1} - 1 = 0 \quad \Rightarrow e^{-x-1} = \frac{1}{3} \quad \Rightarrow -x - 1 = \ln\left(\frac{1}{3}\right) \quad \Rightarrow x = -1 - \ln\left(\frac{1}{3}\right) \approx 0{,}1$

$S_y(0|0{,}10) \quad N(0{,}1|0)$

7.1

$f(0) = 5 \quad \Rightarrow S_y(0/5)$

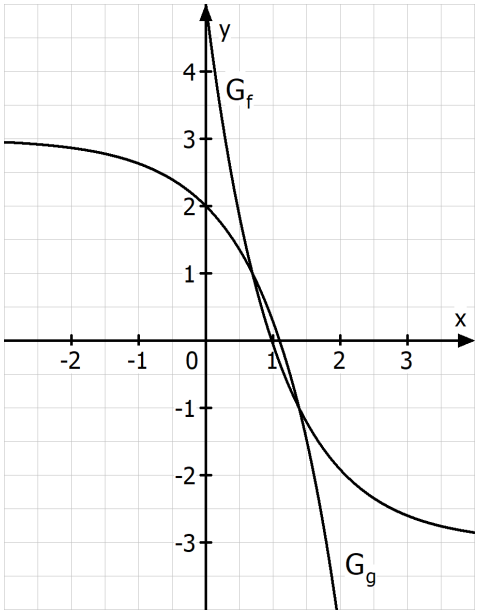
$8e^{-x} - 3 = 0 \quad \Rightarrow 8e^{-x} = 3 \quad \Rightarrow e^{-x} = \frac{3}{8}$

$\Rightarrow x = \frac{\ln\frac{3}{8}}{-1} \approx 0{,}98 \quad \Rightarrow N(0{,}98/0)$

$g(0) = 3 \quad \Rightarrow S_y(0/3)$

$3 - e^x = 0 \quad \Rightarrow e^x = 3 \quad \Rightarrow x = \ln 3 \approx 1{,}10 \Rightarrow N(1{,}10/0)$

7.2



7.3

$8e^{-x}-3=3-e^{x} \quad \Rightarrow 8e^{-x}+e^{x}-3=0 \;\Rightarrow e^{2x}-3e^{x}+8=0$

Substitution: $z=e^{x}$

$\Rightarrow z^{2}-3z+8=0 \quad \Rightarrow z_1=2 \quad z_2=4$

Resubstitution:

$e^{x}=2 \quad \Rightarrow x=\ln 2 \qquad e^{x}=4 \;\Rightarrow x=\ln 4$

$\Rightarrow S_1(\ln 2/1) \qquad S_2(\ln 4/-1)$

8 $\quad 2\cdot e^{1,6094t}=8500 \quad \Rightarrow e^{1,6094t}=4250 \quad \Rightarrow 1,6094t=\ln(4250) \quad \Rightarrow t=\dfrac{\ln(4250)}{1,6094}\approx 5,19$ Tage

9.1 $f(10)\approx 28,65\,\text{mg}$

9.2

$100e^{-0,125t}<10 \quad \Rightarrow e^{-0,125t}<0,1 \quad \Rightarrow -0,125t<\ln(0,1) \quad \Rightarrow t>\dfrac{\ln(0,1)}{-0,125}\approx 18,42$

Nach 18,42 Tagen ist die Konzentration des Medikaments
im Körper unter 10 mg gesunken.

10 $\quad e^{x^2}=e^{2x-1} \quad \Rightarrow x^2=2x-1 \quad \Rightarrow x^2-2x+1=0 \quad \Rightarrow (x-1)^2=0 \quad \Rightarrow x=1$

11

$$\left(e^x-2\right)^2-4=0 \quad \Rightarrow e^{2x}-4e^x+4-4=0 \quad \Rightarrow e^{2x}-4e^x=0$$

$$\Rightarrow e^x\left(e^x-4\right)=0 \quad e^x=0\,(f) \quad e^x-4=0 \quad \Rightarrow e^x=4 \Rightarrow x=\ln\left(4\right)$$

12 $\left(e^x\right)^2=25 \quad \Rightarrow 1)\ e^x=-5$ geht nicht $\qquad 2)\ e^x=5 \quad \Rightarrow x=\ln 5$